GESTA itinerante

Barcelona 26 de Noviembre

Información básica

GESTA itinerante consiste en un día intensivo de charlas relacionadas con la geometría simpléctica, de Poisson y de contacto. En esta ocasión, 26 de Noviembre de 2010, la reunión tendrá lugar en Barcelona. Los conferenciantes son Fernando Etayo (Universidad de Cantabria), David Martínez (IST Lisboa) y Vicente Muñoz (Universidad Complutense de Madrid)

Lugar

Las conferencias tendrán lugar en la FME en el aula 100

Contacta

Los organizadores de este encuentro son Jaume Amorós, Eva Miranda y Fran Presas.

Últimas actualizaciones

Título y resumen de David Martinez y aula asignada (11 Nov)

Título y resumen de Fernando Etayo y Vicente Muñoz (4 Nov)

Página creada (25 Oct)

GESTA itinerante

Barcelona 26 de Noviembre

Índice Conferenciantes y Programa Financiación GESTAS itinerantes anteriores Cómo llegar

Programa (26 de noviembre)

FME (aula 100)

10-11- Fernando Etayo (Universidad de Cantabria) "De la geometría Simpléctica a las Álgebras". **FICHERO PDF DE LA CHARLA (NUEVO!)**

11-11:30- Pausa Café

11:30-12:30- David Martínez-Torres (IST-Lisboa), "Non-linear symplectic Grassmannians and Hamiltonian actions in prequantum line bundles"

15:00-16:00h- Vicente Muñoz (Universidad Complutense de Madrid), Moduli spaces of symplectic bundles

16:00-18:00- Reunión organizativa GESTA 2011.

GESTA itinerante

Barcelona 26 de Noviembre

Este encuentro está financiado por

Grup de Recerca SGR Geometria Diferencial (AGAUR)

Ministerio de Ciencia e Innovación

De la Geometía Simpléctica a las Álgebras

Fernando Etayo Gordejuela. Universidad de Cantabria

Seminario GESTA. UPC, Barcelona, 26 de noviembre de 2010

Esta es una charla expositiva, en la que partiendo de resultados recientes de Geometría Simpléctica (de Variedades Bilagrangianas en concreto) se mostrarán algunas relaciones entre Geometría Simpléctica, Estructuras Polinómicas en Variedades y Álgebras reales. La parte final de la charla se dedicará a mostrar ejemplos sobre esferas en espacios euclídeos. En cierto sentido, la charla se presenta como un paseo hacia nociones matemáticamente más básicas. Se evitarán tecnicismos excesivos, por lo que la buena parte de la misma podrá ser seguida por una audiencia con conocimientos básicos de variedades diferenciables.

De la Geometía Simpléctica a las Álgebras

Fernando Etayo Gordejuela

Universidad de Cantabria

Seminario GESTA. UPC, Barcelona, 26 de noviembre de 2010

Guión

- Variedades bilagrangianas
- Estructuras polinómicas
- Álgebras reales
- Las esferas

Guión

- Variedades bilagrangianas
- Estructuras polinómicas
- Álgebras reales
- Las esferas

El propósito de la charla es mostrar algunos de los temas en que he trabajado, partiendo de la Geometría Simpléctica y llegando a las álgebreas reales. El orden seguido en la exposición no se corresponde con el cronológico de elaboración.

Guión

- Variedades bilagrangianas
- Estructuras polinómicas
- Álgebras reales
- Las esferas

El propósito de la charla es mostrar algunos de los temas en que he trabajado, partiendo de la Geometría Simpléctica y llegando a las álgebreas reales. El orden seguido en la exposición no se corresponde con el cronológico de elaboración.

Va a ser una charla al revés: de lo que tiene más estructura a lo que tiene menos, de más *difícil* a más *fácil*.

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Definición: Una variedad (casi)-bilagrangiana es una variedad simpléctica (M, ω) dotada de dos (distribuciones) foliaciones lagrangianas, i.e. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tales que $\omega|_{\mathcal{D}_1} = \omega|_{\mathcal{D}_2} = 0$.

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Definición: Una variedad (casi)-bilagrangiana es una variedad simpléctica (M, ω) dotada de dos (distribuciones) foliaciones lagrangianas, i.e. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tales que $\omega|_{\mathcal{D}_1} = \omega|_{\mathcal{D}_2} = 0$.

Teorema (Hess, 1980):

(a) (conexión bilagrangiana) Una variedad bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza las foliaciones. La conexión ∇ es simétrica.

(b) (conexión casi-bilagrangiana) Una variedad casi-bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza ω, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, y verifica

$$\mathrm{Tor}_\nabla(X_1, X_2) = 0, \ \forall X_i \in \mathcal{D}_i$$

donde Tor_∇ es la torsión de ∇.

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Definición: Una variedad (casi)-bilagrangiana es una variedad simpléctica (M, ω) dotada de dos (distribuciones) foliaciones lagrangianas, i.e. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tales que $\omega|_{\mathcal{D}_1} = \omega|_{\mathcal{D}_2} = 0$.

Teorema (Hess, 1980):

(a) (conexión bilagrangiana) Una variedad bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza las foliaciones. La conexión ∇ es simétrica.

(b) (conexión casi-bilagrangiana) Una variedad casi-bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza ω, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, y verifica

$$\mathrm{Tor}_\nabla(X_1, X_2) = 0, \ \forall X_i \in \mathcal{D}_i$$

donde Tor_∇ es la torsión de ∇.

Problemas:

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Definición: Una variedad (casi)-bilagrangiana es una variedad simpléctica (M, ω) dotada de dos (distribuciones) foliaciones lagrangianas, i.e. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tales que $\omega|_{\mathcal{D}_1} = \omega|_{\mathcal{D}_2} = 0$.

Teorema (Hess, 1980):

(a) (conexión bilagrangiana) Una variedad bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza las foliaciones. La conexión ∇ es simétrica.

(b) (conexión casi-bilagrangiana) Una variedad casi-bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza ω, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, y verifica

$$\mathrm{Tor}_\nabla(X_1, X_2) = 0, \ \forall X_i \in \mathcal{D}_i$$

donde Tor_∇ es la torsión de ∇.

Problemas:

(1) ¿Es la conexión bilagrangiana una conexión de Levi-Civita?

Variedades bilagrangianas: Planteamiento

Definición: Una variedad (casi)-bilagrangiana es una variedad simpléctica (M, ω) dotada de dos (distribuciones) foliaciones lagrangianas, i.e. $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ tales que $\omega|_{\mathcal{D}_1} = \omega|_{\mathcal{D}_2} = 0$.

Teorema (Hess, 1980):

(a) (conexión bilagrangiana) Una variedad bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza las foliaciones. La conexión ∇ es simétrica.

(b) (conexión casi-bilagrangiana) Una variedad casi-bilagrangiana admite una única conexión simpléctica ∇ que paraleliza ω, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, y verifica

$$\mathrm{Tor}_{\nabla}(X_1, X_2) = 0, \ \forall X_i \in \mathcal{D}_i$$

donde Tor_{∇} es la torsión de ∇.

Problemas:

(1) ¿Es la conexión bilagrangiana una conexión de Levi-Civita?

(2) ¿Existen más conexiones ligadas a estas estructuras?

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (1)

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (1)

[(con R. Santamaría) *The canonical connection of a bi-Lagrangian manifold*. J. Physics A: Math. Gen. **34** (2001), 981-987.]
[(con R. Santamaría y U. R. Trías): *The geometry of a bi-Lagrangian manifold*. Differential Geom. Appl. **24** (2006), 33-59.]

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (1)

[(con R. Santamaría) *The canonical connection of a bi-Lagrangian manifold*. J. Physics A: Math. Gen. **34** (2001), 981-987.]
[(con R. Santamaría y U. R. Trías): *The geometry of a bi-Lagrangian manifold*. Differential Geom. Appl. **24** (2006), 33-59.]

Teorema 1. *Una variedad simpléctica dotada de una distribución lagrangiana admite infinitas distribuciones lagrangianas.*

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (1)

[(con R. Santamaría) *The canonical connection of a bi-Lagrangian manifold*. J. Physics A: Math. Gen. **34** (2001), 981-987.]
[(con R. Santamaría y U. R. Trías): *The geometry of a bi-Lagrangian manifold*. Differential Geom. Appl. **24** (2006), 33-59.]

Teorema 1. *Una variedad simpléctica dotada de una distribución lagrangiana admite infinitas distribuciones lagrangianas.*

Teorema 2. *Toda variedad bilagrangiana está dotada de una métrica semi-riemanniana canónica, cuya conexión de Levi-Civita coincide con la conexión bilagrangiana.*

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (1)

[(con R. Santamaría) *The canonical connection of a bi-Lagrangian manifold*. J. Physics A: Math. Gen. **34** (2001), 981-987.]
[(con R. Santamaría y U. R. Trías): *The geometry of a bi-Lagrangian manifold*. Differential Geom. Appl. **24** (2006), 33-59.]

Teorema 1. *Una variedad simpléctica dotada de una distribución lagrangiana admite infinitas distribuciones lagrangianas.*

Teorema 2. *Toda variedad bilagrangiana está dotada de una métrica semi-riemanniana canónica, cuya conexión de Levi-Civita coincide con la conexión bilagrangiana.*

Teorema 3. *Sea M una variedad. Existe una biyección entre las estructuras casi-bilagrangianas y las casi-parakählerianas en M que se restringe a una biyección entre las bilagrangianas y las parakählerianas.*

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (2)

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (2)

Teorema 4. *Si M es una variedad bilagrangiana entonces M admite estructuras de 3-web, Norden y Riemann casi-producto, para cada métrica riemanniana que haga ortogonales ambas foliaciones.*

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (2)

Teorema 4. *Si M es una variedad bilagrangiana entonces M admite estructuras de 3-web, Norden y Riemann casi-producto, para cada métrica riemanniana que haga ortogonales ambas foliaciones.*

Teorema 5.
(a) Si M es una variedad casi-bilagrangiana coinciden sus conexiones casi-bilagrangiana y de Libermann.
(b) En una variedad bilagrangiana coinciden las conexiones bien-adaptada, de Libermann, natural, bilagrangiana, casi-bilagrangiana y de Levi-Civita.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (3)

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (3)

Conexión bien-adaptada: la canónica como conexión funtorial:
$\nabla\omega = 0, \quad \nabla F = 0$, y

$$\omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_1 Y)), \pi_2 Z) - \omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_2 Z)), \pi_1 Y) = 0,$$

donde $\pi_1 = \frac{I+F}{2}$, $\pi_2 = \frac{I-F}{2}$ son las proyecciones sobre $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (3)

Conexión bien-adaptada: la canónica como conexión funtorial: $\nabla\omega = 0$, $\quad \nabla F = 0$, y

$$\omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_1 Y)), \pi_2 Z) - \omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_2 Z)), \pi_1 Y) = 0,$$

donde $\pi_1 = \frac{I+F}{2}$, $\pi_2 = \frac{I-F}{2}$ son las proyecciones sobre $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$.

Conexión de Libermann: $\tilde{\nabla} F = 0$; $\tilde{\nabla} g = 0$ y $\mathrm{Tor}_{\tilde{\nabla}}(X_1, X_2) = 0, \quad \forall X_1 \in F^+(M), X_2 \in F^-(M)$.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (3)

Conexión bien-adaptada: la canónica como conexión funtorial: $\nabla\omega = 0, \quad \nabla F = 0$, y

$$\omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_1 Y)), \pi_2 Z) - \omega(F(\mathrm{Tor}_\nabla(X, \pi_2 Z)), \pi_1 Y) = 0,$$

donde $\pi_1 = \frac{I+F}{2}$, $\pi_2 = \frac{I-F}{2}$ son las proyecciones sobre $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$.

Conexión de Libermann: $\tilde{\nabla} F = 0$; $\tilde{\nabla} g = 0$ y $\mathrm{Tor}_{\tilde{\nabla}}(X_1, X_2) = 0, \quad \forall X_1 \in F^+(M), X_2 \in F^-(M)$.

Conexión natural: $\nabla_X = \frac{1}{2}(\nabla^g_X + F \circ \nabla^g_X \circ F)$, donde ∇^g es la conexión de Levi-Civita de g (ver [(con V. Cruceanu) *On almost para-Hermitian manifolds*. Algebras Groups Geom. **16** (1999) 47-61.])

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).
- M es compacta.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).
- M es compacta.
- La métrica neutra de M es plana.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).
- M es compacta.
- La métrica neutra de M es plana.

Respuesta

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).
- M es compacta.
- La métrica neutra de M es plana.

Respuesta

- No existe relación y hay ejemplos de las ocho posibilidades.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (4)

Problema Sea M una variedad bilagrangiana. ¿Existe alguna relación entre los siguientes conceptos?

- Las dos hojas que pasan por p sólo se cortan en p. (Llamando $N(p)$ al número de puntos en que se cortan las dos hojas que pasan por p, decimos que la intersección es trivial si $N(p) = 1$).
- M es compacta.
- La métrica neutra de M es plana.

Respuesta

- No existe relación y hay ejemplos de las ocho posibilidades.
- Si M tiene dimensión dos la métrica neutra es lorentziana y el estudio es esencialmente diferente.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (5)

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (5)

Probamos que

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (5)

Probamos que

- $N(p)$ en general depende de p (no tiene por qué ser constante).

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (5)

Probamos que

- $N(p)$ en general depende de p (no tiene por qué ser constante).
- Dos hojas una de cada familia no tiene por qué cortarse.

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (5)

Probamos que

- $N(p)$ en general depende de p (no tiene por qué ser constante).
- Dos hojas una de cada familia no tiene por qué cortarse.

Ejemplos

compacto	plano	trivial	ejemplos
sí	sí	sí	Un toro plano $\mathbb{T}^{2n}$
sí	sí	no	$\mathbb{T}^2_1 \times \mathbb{T}^2_2$, $\mathbb{T}^2_1$ (resp. $\mathbb{T}^2_2$) con $N(p) = 1$ (resp. $N(p) = 2$)
sí	no	sí	$G \times G$, siendo G un toro no plano $\mathbb{T}^n$
sí	no	no	$T \times T$, siendo T un toro de Clifton-Pohl

Variedades bilagrangianas: Resultados obtenidos (6)

compacto	plano	trivial	ejemplos
no	sí	sí	El espacio Euclídeo neutro $G \times G$, siendo G un cilindro plano $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^m$ $T(\mathbb{T}^n)$
no	sí	no	$T(M)$, M Una variedad de Hantzsche-Went
no	no	sí	Un cilindro no plano $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^{2k}$ Ejemplos de Kaneyuki El espacio proyectivo paracomplejo
no	no	no	$\mathbb{R}^2 \times T$, siendo T un toro de Clifton-Pohl

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

- casi compleja $J^2 = -1$ y compleja si además $N_J = 0$. Las variedades holomorfas modeladas sobre $\mathbb{C}^n$ son complejas en este sentido.

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

- casi compleja $J^2 = -1$ y compleja si además $N_J = 0$. Las variedades holomorfas modeladas sobre $\mathbb{C}^n$ son complejas en este sentido.

  con métricas
  - Norden $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow g$ de signatura (n, n)).
  - casi Hermítica $g(JX, JY) = g(X, Y)$
    - casi-Kähler $d\Omega = 0$
    - Kähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0$

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

- casi compleja $J^2 = -1$ y compleja si además $N_J = 0$. Las variedades holomorfas modeladas sobre $\mathbb{C}^n$ son complejas en este sentido.
  con métricas
  - Norden $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow g$ de signatura (n, n)).
  - casi Hermítica $g(JX, JY) = g(X, Y)$
    - casi-Kähler $d\Omega = 0$
    - Kähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0$
- casi producto $J^2 = 1$ y casi-paracompleja si $\dim J^+ = \dim J^-$; localmente producto (resp. paracompleja) si $N_J = 0$

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

- casi compleja $J^2 = -1$ y compleja si además $N_J = 0$. Las variedades holomorfas modeladas sobre $\mathbb{C}^n$ son complejas en este sentido.
  con métricas
  - Norden $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow g$ de signatura (n, n)).
  - casi Hermítica $g(JX, JY) = g(X, Y)$
    - casi-Kähler $d\Omega = 0$
    - Kähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0$
- casi producto $J^2 = 1$ y casi-paracompleja si $\dim J^+ = \dim J^-$; localmente producto (resp. paracompleja) si $N_J = 0$
  con métricas
  - casi producto (semi)-Riemanniana $g(JX, JY) = g(X, Y)$
  - casi para Hermítica $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow$ casi-paracompleja y g de signatura (n, n)).
    - casi-paraKähler $d\Omega = 0$
    - paraKähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0$

Estructuras polinómicas en variedades (1)

Vienen dadas por campos tensoriales de tipo (1,1) que tienen polinomio mínimo.

Ejemplos:

- casi compleja $J^2 = -1$ y compleja si además $N_J = 0$. Las variedades holomorfas modeladas sobre $\mathbb{C}^n$ son complejas en este sentido.
  con métricas
  - Norden $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow g$ de signatura (n, n)).
  - casi Hermítica $g(JX, JY) = g(X, Y)$
    - casi-Kähler $d\Omega = 0$
    - Kähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0$
- casi producto $J^2 = 1$ y casi-paracompleja si $\dim J^+ = \dim J^-$; localmente producto (resp. paracompleja) si $N_J = 0$
  con métricas
  - casi producto (semi)-Riemanniana $g(JX, JY) = g(X, Y)$
  - casi para Hermítica $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ ($\Rightarrow$ casi-paracompleja y g de signatura (n, n)).
    - casi-paraKähler $d\Omega = 0$
    - paraKähler $\{d\Omega = 0, N_J = 0\} \Leftrightarrow \nabla J = 0 \Leftrightarrow$ bilagrangiana

Estructuras polinómicas en variedades (2)

Más ejemplos:

Estructuras polinómicas en variedades (2)

Más ejemplos:

- casi-tangentes $J^2 = 0$. El fibrado tangente de toda variedad tiene esta estructura.

Estructuras polinómicas en variedades (2)

Más ejemplos:

- casi-tangentes $J^2 = 0$. El fibrado tangente de toda variedad tiene esta estructura.
- $(J^4 = 1)$ manifolds. Nacieron para el estudio del campo electromagnético.

Estructuras polinómicas en variedades (2)

Más ejemplos:

- casi-tangentes $J^2 = 0$. El fibrado tangente de toda variedad tiene esta estructura.
- $(J^4 = 1)$ manifolds. Nacieron para el estudio del campo electromagnético.
- f-estructuras o estructuras de Yano $f^3 + f = 0$

Estructuras polinómicas en variedades (3)

Estructuras polinómicas en variedades (3)

CON VARIAS ESTRUCTURAS:

F, P, J con $F^2 = \pm I, P^2 = \pm I, J^2 = \pm I, J = P \circ F, PF \pm FP = 0$

Estructuras polinómicas en variedades (3)

CON VARIAS ESTRUCTURAS:

F, P, J con $F^2 = \pm I, P^2 = \pm I, J^2 = \pm I, J = P \circ F, PF \pm FP = 0$

- 3-web o casi biparacompleja
  $F^2 = P^2 = 1; PF + FP = 0$ ($\Rightarrow J^2 = -1$)
  Modeliza tener un 3-web: tres distribuciones dos a dos transversas.

Estructuras polinómicas en variedades (3)

CON VARIAS ESTRUCTURAS:

F, P, J con $F^2 = \pm I, P^2 = \pm I, J^2 = \pm I, J = P \circ F, PF \pm FP = 0$

- 3-web o casi biparacompleja
  $F^2 = P^2 = 1; PF + FP = 0$ $(\Rightarrow J^2 = -1)$
  Modeliza tener un 3-web: tres distribuciones dos a dos transversas.
- bicompleja $F^2 = P^2 = -1; PF - FP = 0$ $(\Rightarrow J^2 = 1)$

Estructuras polinómicas en variedades (3)

CON VARIAS ESTRUCTURAS:

F, P, J con $F^2 = \pm I, P^2 = \pm I, J^2 = \pm I, J = P \circ F, PF \pm FP = 0$

- 3-web o casi biparacompleja
  $F^2 = P^2 = 1; PF + FP = 0$ $(\Rightarrow J^2 = -1)$
  Modeliza tener un 3-web: tres distribuciones dos a dos transversas.
- bicompleja $F^2 = P^2 = -1; PF - FP = 0$ $(\Rightarrow J^2 = 1)$
- hipercompleja $F^2 = P^2 = -1; PF + FP = 0$ $(\Rightarrow J^2 = -1)$

Estructuras polinómicas en variedades (3)

CON VARIAS ESTRUCTURAS:

F, P, J con $F^2 = \pm I, P^2 = \pm I, J^2 = \pm I, J = P \circ F, PF \pm FP = 0$

- 3-web o casi biparacompleja
  $F^2 = P^2 = 1; PF + FP = 0$ ($\Rightarrow J^2 = -1$)
  Modeliza tener un 3-web: tres distribuciones dos a dos transversas.
- bicompleja $F^2 = P^2 = -1; PF - FP = 0$ ($\Rightarrow J^2 = 1$)
- hipercompleja $F^2 = P^2 = -1; PF + FP = 0$ ($\Rightarrow J^2 = -1$)
- casi hiperproducto $F^2 = P^2 = 1; PF - FP = 0$ ($\Rightarrow J^2 = 1$)

Algunos trabajos sobre estructuras en variedades

Geometría paracompleja

- (con A.A. Salimov y M. Iscan) *Paraholomorphic B-manifold and its properties*. Topology and its. Appl. **154** (2007) 925-933.

Geometría compleja

- (con M. Fioravanti y U. R. Trías) *The dimension function of the holomorphic spaces of a real submanifold of an almost complex manifold.* Czechoslovak Math. J. **51 (126)** (2001), 139-141.
- *The measure of holomorphicness of a real submanifold of an almost Hermitian manifold*. Proceed. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2911-2920.

Webs

- (con R. Santamaría): *Connections functorially attached to almost complex product structures.* Houston Journal of Math. **35** (2009), 411-434.

Las álgebras

Las álgebras

Álgebra: $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con un producto interno. Por ejemplo $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Las álgebras

Álgebra: $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con un producto interno. Por ejemplo $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Álgebras en $\mathbb{R}^2 = \{a + bi\}$

Las álgebras

Álgebra: $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con un producto interno. Por ejemplo $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Álgebras en $\mathbb{R}^2 = \{a + bi\}$

- Números complejos: $i^2 = -1$. Es un cuerpo.

Las álgebras

Álgebra: $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con un producto interno. Por ejemplo $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Álgebras en $\mathbb{R}^2 = \{a + bi\}$

- Números complejos: $i^2 = -1$. Es un cuerpo.
- Números paracomplejos o dobles: $i^2 = +1$. Es un álgebra conmutativa y asociativa. Sus divisores de cero son $\{a + ai\}$.

Las álgebras

Álgebra: $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ con un producto interno. Por ejemplo $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial.

Álgebras en $\mathbb{R}^2 = \{a + bi\}$

- Números complejos: $i^2 = -1$. Es un cuerpo.
- Números paracomplejos o dobles: $i^2 = +1$. Es un álgebra conmutativa y asociativa. Sus divisores de cero son $\{a + ai\}$.
- Números duales: $i^2 = 0$. Es un álgebra conmutativa y asociativa. Sus divisores de cero son $\{bi\}$.

Álgebras de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk \colon a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$$

Álgebras de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$$

- Cuaterniones (Hamilton, 1843:)$-i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es cuerpo no conmutativo.

Álgebras de $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$

- Cuaterniones (Hamilton, 1843:)$-i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es cuerpo no conmutativo.
- Bicomplejos (Segre, 1892): $i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es álgebra asociativa y conmutativa.

Álgebras de $\mathbb{R}^4$

$\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$

- Cuaterniones (Hamilton, 1843:)$-i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es cuerpo no conmutativo.
- Bicomplejos (Segre, 1892): $i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es álgebra asociativa y conmutativa.
- Biparacomplejos o cocuaterniones (Cockle, 1848): $i^2 = j^2 = -k^2 = 1$ Es álgebra asociativa.

Álgebras de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk \colon a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$$

- Cuaterniones (Hamilton, 1843:)$-i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es cuerpo no conmutativo.
- Bicomplejos (Segre, 1892): $i^2 = -j^2 = -k^2 = 1$ Es álgebra asociativa y conmutativa.
- Biparacomplejos o cocuaterniones (Cockle, 1848): $i^2 = j^2 = -k^2 = 1$ Es álgebra asociativa.
- "Hiperproducto": $i^2 = j^2 = k^2 = 1$ Es álgebra asociativa y conmutativa.

Representación real de un álgebra

[1]Vid. e.g., Rodrigo Camarero: "Álgebras reales. Endomorfismos sobre el fibrado tangente". Trabajo Dirigido. Matemáticas, UC, 2006

Representación real de un álgebra

Representación real de un álgebra. Es un isomorfismo de álgebras del álgebra real $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ en una subálgebra del álgebra de matrices $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

[1] Vid. e.g., Rodrigo Camarero: "Álgebras reales. Endomorfismos sobre el fibrado tangente". Trabajo Dirigido. Matemáticas, UC, 2006

Representación real de un álgebra

Representación real de un álgebra. Es un isomorfismo de álgebras del álgebra real $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ en una subálgebra del álgebra de matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Teorema [1]. A tiene una representación real si y sólo si es asociativa.

[1]Vid. e.g., Rodrigo Camarero: "Álgebras reales. Endomorfismos sobre el fibrado tangente". Trabajo Dirigido. Matemáticas, UC, 2006

Representación real de un álgebra

Representación real de un álgebra. Es un isomorfismo de álgebras del álgebra real $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ en una subálgebra del álgebra de matrices $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Teorema [1]. A tiene una representación real si y sólo si es asociativa.

Si el álgebra es de la forma
$\mathbb{R}^4 = \{a + bi + cj + dk \colon a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ij = k\}$ la representación se obtiene multiplicando la primera columna $(a, b, c, d)^t$ por $1, i, j, k$.

[1] Vid. e.g., Rodrigo Camarero: "Álgebras reales. Endomorfismos sobre el fibrado tangente". Trabajo Dirigido. Matemáticas, UC, 2006

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a, b)i = (a + bi)i = -b + ai = (-b, a)$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a,b)i = (a+bi)i = -b+ai = (-b,a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a,b)i = (a+bi)i = -b+ai = (-b,a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

paracomplejos $(a,b)i = (a+bi)i = b+ai = (b,a)$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a, b)i = (a + bi)i = -b + ai = (-b, a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

paracomplejos $(a, b)i = (a + bi)i = b + ai = (b, a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a, b)i = (a + bi)i = -b + ai = (-b, a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

paracomplejos $(a, b)i = (a + bi)i = b + ai = (b, a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

duales $(a, b)i = (a + bi)i = ai = (0, a)$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^2$

complejos $(a,b)i = (a+bi)i = -b+ai = (-b,a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

paracomplejos $(a,b)i = (a+bi)i = b+ai = (b,a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

duales $(a,b)i = (a+bi)i = ai = (0,a) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$

Representación[2] real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

[2] R. Camarero, F. Etayo, C. G. Rovira, R. Santamaría: From Algebras to Manifolds. Proceed. ICM 2006, European Math. Society, 2006.

Representación[2] real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Cuaterniones $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$

[2] R. Camarero, F. Etayo, C. G. Rovira, R. Santamaría: From Algebras to Manifolds. Proceed. ICM 2006, European Math. Society, 2006.

Representación[2] real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Cuaterniones $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$

Bicomplejos $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

[2] R. Camarero, F. Etayo, C. G. Rovira, R. Santamaría: From Algebras to Manifolds. Proceed. ICM 2006, European Math. Society, 2006.

Representación[2] real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Cuaterniones $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$

Bicomplejos $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

Esta representación es la obtenida al considerar los bicomplejos como $\mathbb{C}[x]/(x^2-1)$ y haciendo corresponder a cada bicomplejo $(z,w)=z+wj$, con $z,w\in\mathbb{C}$ su representación matricial
$\begin{bmatrix} z & w \\ w & z \end{bmatrix}$

[2] R. Camarero, F. Etayo, C. G. Rovira, R. Santamaría: From Algebras to Manifolds. Proceed. ICM 2006, European Math. Society, 2006.

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Hiperproducto $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

Representación real de álgebras de $\mathbb{R}^4$

Hiperproducto $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

Biparacomplejos $\begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$

Variedades modeladas sobre álgebras

Problemas Las variedades holomorfas (i.e., con un atlas sobre $\mathbb{C}^n$ con cambio de carta holomorfo) son las variedades casi-complejas con Nijenhuis nulo (teorema de Nirenberg-Newlander).

Variedades modeladas sobre álgebras

Problemas Las variedades holomorfas (i.e., con un atlas sobre $\mathbb{C}^n$ con cambio de carta holomorfo) son las variedades casi-complejas con Nijenhuis nulo (teorema de Nirenberg-Newlander).

1. ¿Qué significa que f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?

Variedades modeladas sobre álgebras

Problemas Las variedades holomorfas (i.e., con un atlas sobre $\mathbb{C}^n$ con cambio de carta holomorfo) son las variedades casi-complejas con Nijenhuis nulo (teorema de Nirenberg-Newlander).

1. ¿Qué significa que f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?
2. ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?

Variedades modeladas sobre álgebras

Problemas Las variedades holomorfas (i.e., con un atlas sobre $\mathbb{C}^n$ con cambio de carta holomorfo) son las variedades casi-complejas con Nijenhuis nulo (teorema de Nirenberg-Newlander).

1. ¿Qué significa que f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?
2. ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?
3. ¿Existe un teorema de Nirenberg-Newlander?

Variedades modeladas sobre álgebras

Variedades modeladas sobre álgebras

- ¿Qué significa que f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?

Variedades modeladas sobre álgebras

- ¿Qué significa que f es $\mathbb{A}$-holomorfa respecto un álgebra $\mathbb{A}$?
- En el caso conmutativo, que la jacobiana de f sea una matriz de las de la representación real del álgebra. En el caso complejo, éstas son las condiciones de Cauchy-Riemann: Sea $f(z) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$; entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{\partial f_1}{\partial v} \end{array} \right\}$$

Del mismo modo, existen las condiciones de para-Cauchy-Riemann, etc.

- ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?

- ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?
- Las que tienen cambios $\mathbb{A}$-holomorfos.

- ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?
- Las que tienen cambios $\mathbb{A}$-holomorfos.

- ¿Existe un teorema de Nirenberg-Newlander?

- ¿Qué son las variedades modeladas sobre un álgebra?
- Las que tienen cambios $\mathbb{A}$-holomorfos.

- ¿Existe un teorema de Nirenberg-Newlander?
- En variedades paracomplejas fue probado por Gadea, P. M.; Grifone, J.; Muñoz Masqué, J. Manifolds modelled over free modules over the double numbers. Acta Math. Hungar. 100 (2003), no. 3, 187 – 203.

Variedades modeladas sobre álgebras

Variedades modeladas sobre álgebras

Moraleja: las variedades con estructuras polinómicas no sólo se parecen a las álgebras sino que las variedades modeladas sobre álgebras tienen las correspondientes estructuras polinómicas.

Variedades modeladas sobre álgebras

Moraleja: las variedades con estructuras polinómicas no sólo se parecen a las álgebras sino que las variedades modeladas sobre álgebras tienen las correspondientes estructuras polinómicas.

Advertencia: No es fácil probar en general que M está modelada sobre un álgebra $\mathbb{A}$ si y sólo si tiene la correspondiente estructura polinómica y Nijenhuis se anula. El teorema en el caso complejo es muy difícil.

Las esferas

Conclusión de lo que vamos a ver: Las propiedades geométricas de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ dependen esencialmente de las propiedades algebraicas del espacio $\mathbb{R}^n$ en que está inmersa.

Las esferas

Conclusión de lo que vamos a ver: Las propiedades geométricas de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ dependen esencialmente de las propiedades algebraicas del espacio $\mathbb{R}^n$ en que está inmersa.

Esferas pares $\mathbb{S}^{2n}$: $\mathbb{S}^2$ es kähleriana (y ninguna más) y $\mathbb{S}^6$ es casi-compleja. No admiten campos sin ceros (teorema de Poincaré-Hopf, porque su característica de Euler es 2).

Las esferas

Conclusión de lo que vamos a ver: Las propiedades geométricas de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ dependen esencialmente de las propiedades algebraicas del espacio $\mathbb{R}^n$ en que está inmersa.

Esferas pares $\mathbb{S}^{2n}$: $\mathbb{S}^2$ es kähleriana (y ninguna más) y $\mathbb{S}^6$ es casi-compleja. No admiten campos sin ceros (teorema de Poincaré-Hopf, porque su característica de Euler es 2).

Esferas impares $\mathbb{S}^{2n+1}$: Todas son sasakianas. Admiten campos sin ceros: basta tomar N el campo normal y considerar JN, que es tangente a $\mathbb{S}^{2n+1}$, siendo J la estructura compleja de $\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$.

Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$

Son las *mejores* esferas impares porque son los vectores de norma uno de las álgebras de división normadas:

Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$

Son las *mejores* esferas impares porque son los vectores de norma uno de las álgebras de división normadas:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ que es cuerpo conmutativo.

Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$

Son las *mejores* esferas impares porque son los vectores de norma uno de las álgebras de división normadas:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ que es cuerpo conmutativo.
- $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ que es cuerpo no conmutativo.

Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$

Son las *mejores* esferas impares porque son los vectores de norma uno de las álgebras de división normadas:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ que es cuerpo conmutativo.
- $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ que es cuerpo no conmutativo.
- $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ que es álgebra no asociativa.

Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$

Son las *mejores* esferas impares porque son los vectores de norma uno de las álgebras de división normadas:

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ que es cuerpo conmutativo.
- $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ que es cuerpo no conmutativo.
- $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ que es álgebra no asociativa.

con lo que $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ son grupos de Lie y $\mathbb{S}^7$ es paralelizable. Estas tres son las únicas esferas paralelizables (Adams, 1958).

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- $\mathbb{R}^7$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los octoniones $\mathbb{O}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- $\mathbb{R}^7$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los octoniones $\mathbb{O}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- Ningún otro $\mathbb{R}^n$ tiene un producto vectorial en el sentido de que el producto sea anticonmutativo y perpendicular a los vectores que se multiplican.

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- $\mathbb{R}^7$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los octoniones $\mathbb{O}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- Ningún otro $\mathbb{R}^n$ tiene un producto vectorial en el sentido de que el producto sea anticonmutativo y perpendicular a los vectores que se multiplican.

Así podemos construir estructuras casi-complejas en $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$:

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- $\mathbb{R}^7$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los octoniones $\mathbb{O}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- Ningún otro $\mathbb{R}^n$ tiene un producto vectorial en el sentido de que el producto sea anticonmutativo y perpendicular a los vectores que se multiplican.

Así podemos construir estructuras casi-complejas en $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$: $J(X) = N \wedge X$, siendo $\wedge$ el correspondiente producto vectorial en $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$.

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$

Son las *mejores* esferas pares porque viven en un espacio euclídeo con producto vectorial $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$:

- $\mathbb{R}^3$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los cuaterniones $\mathbb{H}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- $\mathbb{R}^7$ tiene un producto vectorial que es igual al de la parte imaginaria de los octoniones $\mathbb{O}$ con la diferencia de que $i \wedge i = 0$ en vez de $i^2 = -1$, etc.
- Ningún otro $\mathbb{R}^n$ tiene un producto vectorial en el sentido de que el producto sea anticonmutativo y perpendicular a los vectores que se multiplican.

Así podemos construir estructuras casi-complejas en $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^6$: $J(X) = N \wedge X$, siendo $\wedge$ el correspondiente producto vectorial en $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$.

Y estructura simpléctica en $\mathbb{S}^2$: $\Omega(X, Y) = N \cdot (X \wedge Y)$

Fibraciones de Hopf

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^8$ son las rectas proyectivas sobre $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, pues tomando $\mathbb{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

$P_1(\mathbb{A}) = \mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^{2n}$ con $n = 1, 2, 4$, según corresponda.

Fibraciones de Hopf

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^8$ son las rectas proyectivas sobre $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, pues tomando $\mathbb{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

$P_1(\mathbb{A}) = \mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^{2n}$ con $n = 1, 2, 4$, según corresponda.

Se puede definir entonces la proyección $\mathbb{A}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{A})$ que a cada vector no nulo la hace corresponder la recta vectorial que genera, esto es, el punto proyectivo que define.

Fibraciones de Hopf

Las esferas $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^8$ son las rectas proyectivas sobre $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, pues tomando $\mathbb{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

$P_1(\mathbb{A}) = \mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^{2n}$ con $n = 1, 2, 4$, según corresponda.

Se puede definir entonces la proyección $\mathbb{A}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{A})$ que a cada vector no nulo la hace corresponder la recta vectorial que genera, esto es, el punto proyectivo que define.

Esta aplicación se puede restringir a la esfera unidad en $\mathbb{A}^2 - \{0\}$, y así se obtiene tres fibraciones, llamadas fibraciones de Hopf:

Fibraciones de Hopf

Fibraciones de Hopf

- $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\} = \mathbb{C}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, con fibra $\mathbb{S}^1$.

Fibraciones de Hopf

- $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\} = \mathbb{C}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, con fibra $\mathbb{S}^1$.
- $\mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{R}^8 - \{0\} = \mathbb{H}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{H}) = \mathbb{S}^4$, con fibra $\mathbb{S}^3$.

Fibraciones de Hopf

- $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\} = \mathbb{C}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, con fibra $\mathbb{S}^1$.
- $\mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{R}^8 - \{0\} = \mathbb{H}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{H}) = \mathbb{S}^4$, con fibra $\mathbb{S}^3$.
- $\mathbb{S}^{15} \hookrightarrow \mathbb{R}^{16} - \{0\} = \mathbb{O}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{O}) = \mathbb{S}^8$, con fibra $\mathbb{S}^7$.

Fibraciones de Hopf

- $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\} = \mathbb{C}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, con fibra $\mathbb{S}^1$.
- $\mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{R}^8 - \{0\} = \mathbb{H}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{H}) = \mathbb{S}^4$, con fibra $\mathbb{S}^3$.
- $\mathbb{S}^{15} \hookrightarrow \mathbb{R}^{16} - \{0\} = \mathbb{O}^2 - \{0\} \to P_1(\mathbb{O}) = \mathbb{S}^8$, con fibra $\mathbb{S}^7$.

Las fibraciones de Hopf tienen mucho interés. Por ejemplo, en Topología Algebraica para la determinación de grupos de homotopía de orden superior de esferas.

MUCHAS GRACIAS